Карусель. Исходный этап

1. Бригада рабочих может успеть за день либо напилить шесть поленниц дров, либо наколоть двенадцать таких поленниц. Какое наибольшее количество дров они могут напилить, чтобы успеть наколоть их в тот же день?

Ответ: 4 поленницы.

2. На каждой клетке шахматной доски написали целое число так, что числа на клетках, имеющих общую сторону, отличаются на 1. На одной из клеток написано число 3, на другой – число 17. Какова сумма чисел на главных диагоналях?

Ответ: 160.

3. Квадрат числа состоит из цифр 0, 2, 3, 5, причем каждая цифра взята ровно один раз. Какое это число?

Ответ: 55.

4. Сегодняшнюю дату можно записать в виде 03.12.17. Для какой ближайшей из будущих дат запись указанного вида состоит из шести различных цифр?

Ответ: 24.03.18.

5. Между A и B 15 км. В 9:30 из A в B со скоростью 4 км/ч отправился пешеход. Переночевав в B, он на следующий день в 11:00 отправился из B в A со скоростью 5 км/ч. Оба раза он проходил мимо придорожного дуба в одно и то же время дня. В какое?

Ответ: в 12:00.

6. На доске написано число 23. Каждую минуту число, написанное на доске, стирают и записывают на его месте произведение его цифр, увеличенное на 12. Какое число будет записано на доске через час?

Ответ: 16.

7. Иван Иванович рассказал ребятам, что купил собаку. Саша думает, что эта собака – черный пудель, Паша считает ее белой болонкой, а Маша – белым бультерьером. Известно, что каждый из ребят верно угадал либо цвет шерсти, либо породу собаки, но не то и другое вместе. Назвать цвет шерсти и породу собаки.

Ответ: белый пудель.

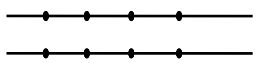
8. Мальчик пошел с отцом в тир. Отец купил ему 10 пулек. В дальнейшем отец за каждое попадание давал сыну две дополнительные пульки. Сын выстрелил 50 раз, после чего пульки у него кончились. Сколько раз он попал?

Ответ: 20.

9. Я еду в трамвае и замечаю, что параллельно трамвайной линии в противоположном направлении проходит мой приятель. Через минуту я выхожу из вагона. Чтобы догнать приятеля, я пошел за ним вдвое быстрее него, но в 4 раза медленнее трамвая. Через какое время я догоню приятеля?

Ответ: 9 минут.

10. На каждой из двух прямых отметили по 4 точки (смотри рисунок). Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?



Ответ: 48.

11. Профессор Тестер проводит серию тестов, на основании которых выставляет испытуемому средний балл. Ответив на последний тест, Джон понял, что если бы за этот тест он получил 97 очков, то его средний балл равнялся бы 90. Но он получил 73 очка, и теперь его средний балл – 87. Сколько тестов в серии профессора Тестера?

Ответ: 8.

12. Точки A, B, C, D, E расположены на одной прямой в указанной последовательности. AB = 19 см, CE = 99 см, AC = BD. Найти длину DE.

Ответ: 80 см.

13. 7 одинаковых книг стоят дешевле 125 рублей, а 9 таких же книг стоят дороже 145 рублей. Известно также, что книга стоит целое число рублей. Сколько стоит одна книга?

Ответ: 17 рублей.

14. Дано выражение 4 · 12 + 18 : 6 + 3. Какое наибольшее значение можно получить, расставив скобки в этом выражении? Можно использовать любое количество пар скобок.

Ответ: 72.

15. На доске написаны 10 нулей, 10 единиц и 10 двоек. Разрешается стереть любую пару чисел А и Б с доски и написать вместо них число А + Б – 1. После нескольких таких операций на доске осталось только одно число. Чему оно может быть равно?

Ответ: 1.

16. Племянник спросил дядю, сколько тому лет. Дядя ответил, что если к половине его лет прибавить 7, то получится его возраст 13 лет назад. Сколько дяде лет?

Ответ: 30 лет.

Карусель. Зачетный этап

1. Три одинаковых яблока и пять одинаковых груш весят вместе меньше 1 кг, а семь таких же яблок и девять таких же груш весят вместе больше 2 кг. Что тяжелее, яблоко или груша?

Ответ: Яблоко. Решение. Из первого условия, если взвесить такие наборы фруктов дважды, 6 яблок и 10 груш весят меньше 2 кг. Заменим одну грушу на яблоко, получим 7 яблок и 9 груш. В соответствии со вторым условием, они будут весить больше 2 кг. То есть от замены груши на яблоко масса набора увеличилась.

2. В правом верхнем углу шахматной доски стоит король. Петя и Вася играют в интересную игру: за ход можно сдвинуть короля на одну клетку влево, на одну клетку вниз либо по диагонали на одну клетку вниз и влево (естественно, выходить за границы доски нельзя). Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Петя. Проигрышные позиции, в которых номер горизонтали и номер вертикали – нечетные. Первым ходом Петя ходит по диагонали (делает номера равными 7). Если Вася ходит по горизонтали или вертикали, Петя ходит в том же направлении (после хода Васи номер стал чётным, то есть 2 или больше, поэтому ход есть), а если Вася ходит по диагонали, то и Петя тоже ходит по диагонали (после хода Васи оба номера стали четными, то есть 2 или больше, поэтому ход есть). Рано или поздно после хода Пети король окажется в клетке (1,1) и у Васи ходов не будет.

3. Коля и Витя, гуляя по парку, набрели на большую круглую поляну, вокруг которой росло 100 берез. Коля пошел вокруг поляны, считая деревья. Витя тоже пошел вокруг поляны считать деревья, но начал с другого дерева. Дерево, которое по счету Коли было 20-м, у Вити оказалось 7-м. Каким по счету Вити оказалось дерево, с которого Коля начал свой обход?

Ответ: 88м или 26м. Если они шли в одном направлении, то разница в нумерации у них всегда равна 13, поэтому последнее 100-е дерево Коли – это 87е дерево Вити (соответственно, следующее – 88е). Если же они шли навстречу друг другу, то между ними изначально было 24 дерева, тогда в нумерации Вити 1е дерево Коли будет 26м.

4. На складе имелось 40 ящиков гвоздей по 30кг и 38 ящиков по 25кг. Приезжавшие за гвоздями брали каждый 100 или 250 кг. При этом кладовщик сумел удовлетворить все заказы, не вскрывая ни одного ящика. После отгрузки всех заказов на складе осталось меньше 100 кг гвоздей. Сколько человек брали по 100кг гвоздей?

Ответ: 1. Решение: 100 = 25 * 4. 250 = 25 * 10 = 30 * 5 + 25 * 4. То есть ящики по 30 кг могут входить только в заказы на 250 кг, причем сразу по 5 штук. Их было 40, значит осталось 0, 5 или больше. Но гвоздей осталось меньше 100 кг, то есть больше 3х ящиков по 30 кг остаться не могло. Значит все 40 были отданы на 8 заказов по 250 кг. На эти же заказы ушло 8 * 4 = 32 ящика по 25 кг. Осталось 6 ящиков по 25 кг. Все они остаться не могли, т.к. 6 * 25 = 150 > 100, значит был ещё один заказ. Это не мог быть заказ на 250 кг (для него надо 10 ящиков), значит это был заказ на 100 кг. На складе осталось 2 ящика по 25 кг, которых больше не хватает ни на один заказ.

5. На большой лестнице ребята играют в следующую игру. Внизу задумывается число. Поднимаясь, каждый раз можно шагнуть на следующую ступеньку или перешагнуть через одну. В первом случае к числу прибавляется 3, во втором — 4. Вася, задумав некоторое

число, получил, пройдя всю лестницу, число 2017. Может ли Петя, задумав число, большее на 1, получить в конце также число 2017?

Ответ: нет. Если ступенек четное количество, то четность исходного числа не изменяется, если нечетное – то всегда изменяется на противоположную. То есть у Пети и Васи четность изменяется одинаково. Вначале у них были числа разной четности, поэтому и в конце тоже должны получиться числа разной четности.

6. Каждая клетка таблицы 2017×2017 покрашена в один из двух цветов. За один ход разрешается все клетки любой строки (или столбца) перекрасить в тот цвет, который чаще встречается в этой строке (столбце). Удастся ли перекрасить всю таблицу в один цвет?

Ответ: да. Решение: перекрашиваем все строки, получилось строк какого-то цвета больше, чем другого, и все столбцы одинаковые. В каждом этого цвета больше. Перекрашиваем все столбцы.

7. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 10х10. Какое наименьшее количество клеток нужно вырезать, чтобы в оставшейся части нельзя было разместить “доминошку” размером 1х2 клетки?

Ответ: 50. Решение: 50 достаточно, т.к. можно вырезать клетки в шахматном порядке. Если вырезать меньше 50, то найдется квадрат 4х4, в котором не вырезано 3 клетки, в нем и разместится «доминошка».

8. На острове живут лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду. Вам повстречались три островитянина: Ап, Оп и Уп. Ап сказал: “Мы все – лжецы”. Оп ответил: “Нет, лжецов среди нас ровно двое”. Уп промолчал. Кто из них рыцарь, а кто – лжец?

Ответ: Ап и Уп – лжецы, Оп – рыцарь. Ап – лжец (иначе он рыцарь, но при этом лжёт про себя, что он лжец). Значит его утверждение ложно, и среди них 1 или 2 рыцаря. Если Оп – тоже лжец, то рыцарей среди них должны быть 2, но им может быть только Уп. Значит Оп – рыцарь. Тогда его утверждение верно, и Уп – второй лжец.

9. Вдоль железной дороги стоят километровые столбы на расстоянии 1 км друг от друга. Один из них покрасили в синий цвет, а шесть других – в красный. Сумма расстояний от синего столба до всех красных оказалась равна 16 км. Чему может быть равно расстояние между наиболее удаленными друг от друга красными столбами?

Ответ: 6, 7, 8, 9 или 10. Рассмотрим 7 раскрашенных столбов. Если синий – крайний из них, то расстояние от него до всех красных не меньше, чем 1+2+3+4+5+6=21, противоречие. Значит крайние столбы – красные, и расстояние между ними не меньше 6. 6 достижимо, если все столбы стоят подряд и синий – второй из них (сумма расстояний равна 1+1+2+3+4+5=16). Рассмотрим, какое может быть наибольшее расстояние. Сумма расстояний от синего до 4х ближайших красных не меньше 1+1+2+2=6, значит сумма расстояний от синего до двух наиболее удаленных красных не больше 16–6=10. Когда синий стоит между красными эта сумма как раз и будет равна расстоянию между красными столбами. Итак, расстояние не больше 10. Легко построить примеры, когда расстояния 7, 8, 9 и 10 достигаются.

10. Имеется 18 кирпичей размером 2х5х6. Можно ли их уложить в ящик размером 8х9х15? Ломать кирпичи нельзя.

Ответ: нет. Суммарный объем кирпичей в точности равен объему ящика, поэтому кирпичи должны заполнять ящик полностью. Площадь любой грани кирпича – четное число, а площадь одной из граней ящика равна 9х15=135 – нечетная. Целое число кирпичей никак не заполнят эту грань полностью.

11. Завод должен обработать 30 изделий. Каждое изделие должно быть сначала окрашено, а затем смонтировано. Один маляр окрашивает одно изделие за 10 минут, а один монтажник монтирует одно изделие за 20 минут. Сколько минимум потребуется маляров и монтажников, чтобы закончить работу за 2 часа? Несколько рабочих не могут одновременно работать над одним и тем же изделием (то есть 2 маляра не смогут окрасить 1 изделие за 5 минут, но смогут окрасить 2 изделия за 10 минут).

Ответ: 9 рабочих: 3 маляра и 6 монтажников. Если маляров будет 2 или меньше, то окраска всех деталей займет не менее, чем 30 / 2 * 10 = 150 мин. Если монтажников будет 5 или меньше, то монтаж займет не менее, чем 30 / 5 * 20 = 120 мин, плюс ожидание покраски хотя бы одной детали 10 мин, итого 130 мин. 3 маляра и 6 монтажников достаточно: 10 мин монтажники ожидают покраски первых 3 деталей, далее начинают их монтировать. Еще через 10 минут заканчивается окраска еще 3 деталей, остальные монтажники начинают их монтировать. Далее каждые 10 минут происходит следующее: 3 детали заканчивают окрашиваться, 3 монтажника освобождаются и начинают их монтировать. Так происходит 8 раз, после чего все детали оказываются покрашены и остается дождаться 20 мин до завершения их монтажа. Общее время составит 10 + 10 + 10 * 8 + 20 = 120 мин.

12. На доске написано число 1. За ход можно умножить записанное на доске число на любое число от 2 до 9 включительно и полученное число записать на доску вместо предыдущего. Выигрывает тот, кто первым получит число больше 1000. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Выигрывает Петя. Первым ходом он умножает 1 на 4. После ответного хода Васи образуется число 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32 или 36. Умножая это число на соответствующее однозначное, Петя сможет получить число 56, 60, 64 или 72 (8*7, 12*5, 16 * 4, 20 * 3, 24 * 3, 28 * 2, 32 * 2, 36 * 2). В таком случае после ответного хода Васи число будет принадлежать диапазону 112…648 и следующим ходом Петя умножит его на 9 и обязательно выиграет.

13. Верно ли, что среди любых 5 различных чисел всегда можно вычеркнуть 2 так, чтобы оставшиеся 3 стояли либо по возрастанию, либо по убыванию?

Ответ: Да. Рассмотрим наибольшее и наименьшее число, обозначив их А и Б соответственно. Если А и Б стоят рядом, то либо справа, либо слева от них есть 2 числа. Эти 2 числа образуют искомую тройку либо с А, либо с Б. Если же А и Б не стоят рядом, то между ними есть число В. Тогда А, В, Б – искомая тройка..

14. В некотором числе переставили цифры и сложили с исходным. Могло ли получиться число 99999?

Ответ: Нет. Переходов разрядов не было (иначе в самом «правом» таком переходе максимальная цифра, которая могла получиться в сумме, – 8), значит все числа, в сумме дающие 9 разбиваются на пары: 0 и 9, 1 и 8, 2 и 7, 3 и 6, 4 и 5, т.е. количество единиц в записи числа должно равняться количеству восьмерок, т.к. при сложении к каждой единице мы должны прибавить 8, к восьмерке – 1. Т.е. суммарное количество 1 и 8 в записи числа должно быть четным. То же и с остальными парами. Т.е. цифр в числе должно быть четное количество.

15. Несколько крестьян имеют в сумме 64 овцы. Иногда один из крестьян уезжает жить в город и передает всех своих овец одному из оставшихся крестьян. Если у кого-то из крестьян оказывается не менее половины всех овец, то остальные крестьяне сговариваются и раскулачивают его: каждый берет себе столько овец, сколько у него уже есть (если у двоих крестьян по 32 овцы, то раскулачивают кого-то одного из них: второй забирает себе всех овец). Произошло 6 раскулачиваний. Докажите, что в результате все овцы оказались у одного крестьянина.

Решение. Заметим, что если до отъезда крестьянина в город число овец у каждого делится на X, то и после отъезда оно тоже делится на X. После первого раскулачивания число овец у каждого крестьянина делится на 2, после второго – на 4, после третьего – на 8, после 4го – на 16, после 5го – на 32, после 6 – на 64, то есть у одного крестьянина – все 64 овцы, у остальных – 0.

16. В вершинах квадрата написаны целые числа. Разрешается добавить 1 к любым двум числам, связанным общим ребром. Можно ли из набора чисел 1, 0, 0, 0 получить набор, в котором все числа делятся на 3?

Ответ: нет. Обозначим числа в вершинах квадрата A, B, C, D. Изначально A=1, B=C=D=0. Рассмотрим число S = (A + C) – (B + D). Изначально S=1 и не меняется при выполнении операции (1 добавляется ровно к одному из чисел A, C и ровно к одному из чисел B, D). А в итоге S должно получиться кратно 3.

17. Безумный Математик создал компьютер, который играет в "Морской бой" по следующим правилам: оба играющих (Математик и компьютер) расставляют на своих полях 3х5 по одному трехпалубному и по четыре однопалубных корабля (корабли не могут соприкасаться даже углами), причем компьютеру известно расположение кораблей Математика. Первым стреляет Математик. На каждый его выстрел компьютер отвечает "промазал", "ранил" или "убил". Если ответ «ранил» или «убил», то Математик делает еще

один ход, если «промазал», то ход переходит к компьютеру. Если по окончании серии удачных выстрелов Математик не выиграл, то компьютер сразу же уничтожает все корабли Математика (поскольку знает их расположение). Поиграв немного, Математик стал утверждать, что он умеет выигрывать у компьютера независимо от расположения его кораблей. Докажите, что это действительно так: начинающий игрок может гарантированно выиграть независимо от расстановки кораблей.

18. Трое играют в настольный теннис. Игрок, проигравший партию, уступает место игроку, который в ней не участвовал. В итоге оказалось, что 1-й игрок сыграл 10 партий, а 2-й — 21 партию. Сколько партий между собой сыграли 1-й и 3-й игроки ?

Ответ: 0. В двух подряд идущих партиях каждый игрок сыграет хотя бы 1 раз, значит каждый сыграет не менее половины всех партий (если всего партий нечетное число, то округляя вниз). Поскольку 1й игрок сыграл 10 партий, всего игр было не более 21. Но раз 2й сыграл 21 партию, то игр было и не меньше 21. Значит игр было ровно 21 и 2й игрок играл все игры, то есть не отдыхал. То есть 1й и 3й друг с другом не играли вообще.

19. Можно ли натуральные числа от 1 до 21 включительно разбить на несколько групп так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось сумме всех остальных чисел в этой группе?

Решение. Если бы это было возможно, сумма всех чисел в каждой группе была бы четной – а тогда и сумма всех чисел от 1 до 21 была бы четной. Но эта сумма нечетна. Следовательно, требуемое разбиение невозможно.

20. 11 школьников занимаются в 5 кружках (каждый школьник занимается хотя бы в одном кружке). Докажите, что среди них найдутся двое таких школьников А и Б, что Б посещает все кружки, в которые ходит А.

Решение. Обозначим кружки A, B, C, D, E. Очевидно, что если школьник посещает все 5 кружков, он посещает все кружки, в которые ходит любой другой школьник, то есть он есть искомый школьник Б (школьник А – любой). Остальные 30 вариантов наборов кружков разобьем на 10 групп:

1) A, AB, ABC
2) B, BC, BCD
3) C, AC, ACD
4) D, AD, ADE
5) E, AE, ABE
6) BD, ABD, ABCD
7) BE, BCE, ABCE
8) CD, CDE, BCDE
9) CE, ACE, ACDE
10) DE, BDE, ABDE

Поскольку школьников 11, хотя бы двое попадут в одну группу. Это и будут искомые школьники А и Б, поскольку в каждой группе любая пара наборов кружков такова, что один набор полностью входит в другой.

21. (резервная) В футбольном турнире 15 команд сыграли 6 туров – каждая команда сыграла 6 раз с другими. Докажите, что найдутся три команды, которые ни разу не сыграли между собой.

Решение. Для каждой команды есть минимум 8 команд, с которыми она не играла. Рассмотрим команду А и не игравшую с ней команду Б. У А кроме Б есть еще 7 команд, с которыми она не играла. Аналогично у Б есть 7 команд, с которыми она не играла. Если эти множества не пересекаются, то общее число команд >= 7 + 7 + 1 (команда А) + 1 (команда Б) = 16, а по условию их только 15. Противоречие, значит пересечение есть, пусть в него попадает команда В. Тогда А, Б и В не играли между собой.

22. (запасная) В государстве 30 городов, причем любые два из них соединены дорогой. Однажды, после сильного снегопада все дороги оказались занесены снегом. С тех пор каждый день дорожные работники расчищают 29 дорог, а каждую ночь местная метель в районе одного из городов заново заметает все дороги, ведущие из этого города. Докажите, что дорожные работники могут действовать так, что однажды вечером заметенных дорог останется меньше 15.

Решение. Разобьем 30 городов на 15 пар, и мысленно отметим соответствующие 15 дорог. Эти 15 дорог будем чистить в последнюю очередь, только если нет других заметенных снегом дорог. Если к вечеру была расчищена хотя бы 1 из этих 15 дорог, неочищенных осталось меньше 15, что и требовалось. В противном случае ночью метель заметет не более 28 очищенных дорог (из одного города ведет 29 дорог, одна из которых входит в число мысленно отмеченных 15, которые точно неочищенные). Таким образом, за сутки будет очищено 29 дорог, а вновь заметено только не более 28. То есть каждые сутки число заметенных дорог будет уменьшаться и, рано или поздно, станет меньше 15.